L'objectif de ce dossier est de vulgariser de la manière la plus simple possible la simulation de trajectoires d'objets célestes à partir de la physique Newtonienne.

Il s'agit également de s'amuser à calculer des équations accessibles.

Les problématiques :

* Le choix des équations de cinématique.
* Les forces à considérer.
* La méthode de résolution numérique à choisir.
* Comment corriger les erreurs d'orbites dû à la résolution numérique.
* Comment mettre en place la résolution partielle du problème à N corp.

Problématique 1 : -> partiellement résolue. En cours de résolution.

* Le choix est fait sur les équations de cinématique de Newton.
* La deuxième loi de Newton est utilisé pour calculer les différentes accélérations et vitesses.
* En ce qui concerne la vitesse, le théorème de l'énergie mécanique est utilisé lorsqu'un objet ne fournit aucune force.
* Dans le cas où l'objet émet une poussé, les équations de Newton sont utilisées pour calculer la position.
* Une méthode entière détaillant les calculs sera faite.

Problématique 2 : -> Résolue avec les forces actuelles.

* Les forces considérées actuellement sont le poids et l'accélération de la poussé des objets.
* Une section plus approfondi sera faite par la suite pour également introduire les frottement dû à l'air dans l'atmosphère terrestre par exemple.

Problématique 3 : -> partiellement résolue. En cours de résolution.

* Pour l'heure, la méthode d'Euler est utilisée.
* Pour limiter les erreurs dans un premier temps, la méthode de Verlet ou saute-mouton sera utilisé afin de diviser drastiquement la quantité d'erreurs dû au delta.
* Une partie entière sur la méthode utilisé sera faite.

Problématique 4 : -> En cours de résolution.

* Deux cas sont à considérer :
  + 1- Lorsque l'objet effectue une poussé. Dans ce càs là, seule une méthode de résolution numérique performante me semble obligatoire à trouver.
  + 2- Lorsque le corp n'effectue plus de pousser. L'utilisation du théorème de l'énergie mécanique est utile.
* Une problématique se pose sur la manière de récupérer la position exacte après le calcul de la nouvelle norme du vecteur position.
* Tout cela sera expliqué dans une partie indépendante.

Problématique 5 : -> Non résolue. Il s'agit d'un problème secondaire.

* Pour la résolution partielle du problème à N corp de manière numérique, les calculs vont se faire sur l'accélération et par conséquent l'intensité du champ de pesanteur 'g'.
* Une partie entière sera élaboré sur le sujet plus tard.
* L’objet est également d’expliquer de manière fine, l’ensemble des équations de Newton sur la dynamique, et par conséquent d’effectuer quelque pistes de recherche sur le problème à 3 corps.

Hypothèse :

* Possibilité de retomber sur les équations de cinématiques de Newton avec le théorème de l’énergie mécanique. Si cela est possible, les équations de la deuxième de Newton ne seront plus utilisés sous la forme qu’on les connaît, mais sous une forme plus performantes pour avoir une conservation de l’énergie mécanique dans le càs d’une unique force, l’interaction gravitationnelle.

Pour le calcul de l’accélération, nous appliquons la deuxième loi de Newton qui nous dicte la formule suivante :

On notera que correspond au vecteur poids et qui est la force de poussé de la fusée permise par les propulseurs de cette dernières. En outre, cette équation permettant de déterminer l’accélération sera uniquement employé dans le cas d’une poussé, c’est-à-dire lorsque le théorème de l’énergie mécanique n’est plus nulle.

avec , le vecteur correspondant au champ de pesanteur et correspondant à la masse du corp.

En projetant sur l’axe des x on obtient :

En projetant sur l’axe des y on obtient :

Pour le calcul de la norme de l’accélération on effectue :

Le calcul du champ de pesanteur a effectué est le suivant :

Avec G qui est la constante de Newton : , qui correspond à la distance entre le centre l’astre attracteur et le centre de l’astre attiré et correspond à la masse de l’objet attracteur, la norme du vecteur position par rapport à l’objet attracteur.

Cependant, actuellement, nous ne connaissons que la norme de ce vecteur et non ses coordonnées. Pour cela, de la trigonométrie ainsi que le théorème de Pythagore s’imposent.

Pour la calcul de la coordonnée en x, on effectue le calcul suivant :

Une image contenant cercle, diagramme, ligne

Description générée automatiquement

On appelle ici l’angle , l’angle représenté sur l’image ci-contre.

Donc

Pour la calcul de la coordonnée en y, on effectue le calcul suivant :

Donc

Nous sommes dans une configuration où la coordonnée est au carré du faite que la norme du vecteur soit au carré dans les calculs.

En outre, ces coordonnées peuvent-être négative comme positive dû aux équations de trigonométries.

Le calcul pour connaître chacune des coordonnées est le suivant :

Pour le calcul de la vitesse, nous utilisons une nouvelle fois la deuxième loi de Newton en sachant que la vitesse est décrite par l’équation suivante :

On considère comme étant une durée invariante tout au long des calculs et correspondant au temps mis par l’objet pour parcourir une certaine distance dans notre repère.

En exprimant cette équation sur les x, on obtient :

En exprimant cette équation sur les y, on obtient :

Pour le calcul de la position, nous utilisons une nouvelle fois la deuxième loi de Newton en sachant que la position est décrite par l’équation suivante :

On considère comme étant une durée invariante tout au long des calculs et correspondant au temps mis par l’objet pour parcourir une certaine distance dans notre repère.

En exprimant cette équation sur les x, on obtient :

En exprimant cette équation sur les y, on obtient :

L’équation de la position ne sera utilisé que dans le càs où l’objet émette une poussé. Par exemple dans le càs d’une fusée au décollage. A partir du moment où la fusée arrête les moteurs, cette équation ne peut plus être utilisé sous cette forme. Pour cela nous devons utiliser les équations qui seront décrite ci-dessous.

Désormais, nous souhaitons obtenir la trajectoire d’un objet dont l’orbite ne diverge pas avec le temps lors d’une conservation totale de l’énergie mécanique du système. Pour le calcul suivant, nous allons effectuer quelque erreurs d’approximation, qui dans notre càs, ne nous dérange que grandement du faite que nous ne nous préoccupons pas de la création d’un simulateur parfait (sinon, les équations de la Relativité d’Einstein s’impose). Également, pour des raisons de puissances de calculs.

Comme il n’y a pas de variation de l’énergie mécanique,

On note , l’énergie mécanique au point « A » , l’énergie mécanique au point « B ». Le point « A » est le point initiale pour le calcul des énergies et le point « B » est le point d’arrivé de l’objet pour les calculs. Le temps mis pour passer du point « A » au point « B » est décrit par la variable qui reste constant durant toute la phase des calculs.

On rappelle la formule de l’énergie cinétique noté , avec « m » la masse

de l’objet concerné et «  » la vitesse relative de l’objet concerné au carré par rapport à l’objet qui l’attire.

On rappelle la formule de l’énergie potentielle de pesanteur noté avec « m » la masse de l’objet concerné, « z », l’altitude de l’objet concerné par rapport à l’objet qui l’attire et «  » l’intensité gravitationnelle de l’objet attracteur.

Nous retrouvons dans cette écriture, le Poids. Nous pouvons par conséquent réécrire l’équation sous cette forme :

Les équations, présenté ci-contre, permette de présenter une certaine démonstration de la deuxième loi de Newton, dans la mesure où nous verrons par la suite que l’énergie cinétique est issue de la deuxième loi de Newton.

Après une factorisation, nous obtenons une forme assez proche de la forme de Newton dans le càs de l’intervention unique du Poids :

Pour rappel, la formule de Newton est la suivante si nous ne considérons que le Poids : .

est exprimé avec les unités . est exprimé est en mètre.

est exprimé en .

Etant donnée qu’une accélération est exprimé en , peut être considéré comme une accélération. On peut par conséquent noter .

Donc :

Nous obtenons la même formule que pour la deuxième loi de Newton, à l’exception d’un coefficient.

Ecrit autrement, l’accélération est :

Nous aurions par conséquent, une accélération deux fois plus élevée avec le théorème de l’énergie mécanique par rapport à la deuxième loi de Newton. Nous allons voir dans les lignes suivante, l’origine du coefficient.

Cependant, d’où vient l’énergie cinétique ?

Cette question bien qu’anodine, permet de comprendre l’existence du résultat précédent. Pour cela nous sommes obligé de repartir de la deuxième loi de Newton :

On va s’occuper de faire l’intégrale du membre de droite : . Dit de manière plus simple, la somme de l’ensemble des valeurs de la formule . Donc écrire de manière mathématique, . Voici l’ensemble des étapes :

Ce calcul nous permet de mieux comprendre le caractère de l’énergie cinétique. Cela nous permet simplement de transformer les équations de newton en outils mathématiques très puissants qui relie de manière forte, la vitesse et la masse. Cette formule permet également de comprendre l’apparition de la constante lorsque nous souhaitons revenir à l’équation de Newton. Et c’est donc pour cela qu’apparait le coefficient 2 dans la formule si nous commençons les calculs par le théorème de l’énergie mécanique.

Nous pouvons également souhaitez retrouver la deuxième loi de Newton à partir du théorème de l’énergie mécanique, dans le cas d’une non-conservation de l’énergie mécanique du système.

Voici une piste de démonstration de la deuxième loi de Newton par le théorème de l’énergie mécanique.

Formule de la deuxième loi de Newton :

Formule du théorème de l’énergie mécanique : . Une force non-conservative est une force venant modifier l’énergie mécanique du système. Le Poids est une force conservative à l’opposé des forces de frottements étant non-conservatives.

Pour l’heure, nous porterons notre démonstration dans le càs d’une conservation totale de l’énergie du système. Par conséquent, la seule force présente dans le système serait le Poids.

Donc :

Pour le théorème de l’énergie mécanique nous obtenons :

Désormais, si nous considérons une force de poussé. Une démonstration possible serait la suivante.

Comme nous n’avons qu’une force à considérer, l’équation est la suivante :

correspond au vecteur de la poussé de l’objet étudié. AB correspond à la distance entre le point de départ et le point d’arrivé.

Notre objectif est de retrouver l’expression

Certes, pour l’heure nous n’arrivons pas à retrouver la formule, mais nous pouvons déterminer une nouvelle formule pour la position, ou du moins l’altitude (ce qui permet en fin de compte de trouver la position) dans le cas d’un système non conservatif.

Pour trouver l’altitude de l’objet, il nous suffit de modifier l’équation du dessus :

Nous connaissons désormais, l’altitude de l’objet, qui va nous permettre de connaitre par la suite sa position, par le biais de la trigonométrie.

A partir de ces informations, nous pouvons déterminer la position de l’objet. En effet, en ayant l’altitude par rapport à la Terre, et connaissant son rayon, nous pouvons déterminer sa position. Comme dit précédemment, tous les objets sont circulaires ou sphériques dans le cas d’une application en trois dimensions.

Par conséquent, la situation est celle décrite ci-dessous. Nous cherchons X(B), qui est la position de l’objet au point B. Nous pouvons premièrement déterminer la norme du vecteur en ajoutant simplement le rayon de la Terre.

Donc .

Pour retrouver nos coordonnées, nous pouvons simplement utiliser la méthode déjà présente pour calculer le vecteur gravité .

Pour la calcul de la coordonnée en x, on effectue le calcul suivant :

Une image contenant cercle, diagramme, ligne

Description générée automatiquement

On appelle ici l’angle , l’angle représenté sur l’image ci-contre.

Donc

Pour la calcul de la coordonnée en y, on effectue le calcul suivant :

Donc

Nous sommes dans une configuration où la coordonnée est au carré du faite que la norme du vecteur soit au carré dans les calculs.

En outre, ces coordonnées peuvent-être négative comme positive dû aux équations de trigonométries.

Le calcul pour connaître chacune des coordonnées est le suivant en considérant que le calcul de a déjà été effectué. Pour des raisons de clarté et lisibilité, la formule entière ne sera pas écrite.

Désormais, passons à la partie programmation.

L’ensemble du code sera effectué avec des class pour plus de clartés, mais également pour mieux séquencer le programme étant donné que celui-ci risque d’être imposant.

Nous commençons par créer un class Vector2. Cette class va nous permettre de manipuler facilement les vecteurs de nos formules.

La class vecteur sera composé d’uniquement 3 fonctions :

* La fonction « Get » qui permettra de récupérer les coordonnées du vecteur sous la forme d’une liste.
* La fonction « Set », qui permettra de modifier les coordonnées du vecteur.
* La fonction « Norme » qui permettra d’obtenir la norme du vecteur.

D‘autre fonctions pourront-être ajouté par la suite en fonction des problématiques.

Voici le code correspondant :

Une fois la class Vecteur2 crée, nous pouvons commencer à travailler sur les systèmes physiques dont nous avons besoin. Le premier système que nous allons concevoir est celui de la gravité. Pour cela, nous allons créer une class appelée Gravite, qui contiendra 2 fonctions :

* IntensitePesenteur, la fonction qui nous permettra de connaitre les composantes de notre du vecteur gravité aux coordonnées de notre objet. Elle renverra par conséquent un objet Vecteur2 issus de la class Vecteur2 crée précédemment.
* ForceInteraction qui permet de calculer la force attirant deux corps. Elle renverra par conséquent un nombre réel strictement positif.

La fonction IntensitePesenteur prendra 3 arguments en entré :

* *position\_* qui est un vecteur et qui correspond à la position en laquelle nous devons calculer les composantes de notre vecteur gravité.
* *masse\_attracteur\_* qui correspond à la masse du corp attirant notre objet. Cette dernière est un nombre réel strictement positif et peut-être entière ou décimale.
* rayon\_ qui correspond au rayon de l’astre attracteur. Cette dernière est un nombre réel strictement positif et peut-être entière ou décimale. Nous considérerons dans ce cours, tous les objets comme des solides indéformables, soit ponctuel ou bien sphérique d’un rayon invariant.

La fonction se présente sous la forme suivante :

Par la suite, nous devons calculer la norme au carrée de l’intensité gravitationnelle à notre position, c’est-à-dire :

Cela revient dans le code à écrire la ligne suivante :

Une fois déterminé, il nous faut connaître ses composantes, c’est-à-dire ses coordonnées.

Cela revient à obtenir les deux lignes suivante :

Finalement, il nous reste à effectuer la racine carré de chacune des coordonnées. Cependant, nous devons vérifier que les coordonnées ne sont pas nulle, car il est impossible de diviser par 0. Nous obtenons par conséquents les deux lignes suivantes :

La fonction ForceInteraction prendra 4 arguments en entré :

* *masse\_objet1\_* qui correspond à la masse de l’objet 1 est qui est un nombre réel strictement positif.
* *masse\_objet2\_* qui correspond à la masse de l’objet 2 est qui est un nombre réel strictement positif.
* *Position\_objet1\_* qui correspond à la position de l’objet 1. Il s’agit d’un vecteur.
* *Position\_objet2\_* qui correspond à la position de l’objet 2. Il s’agit d’un vecteur.

La distance séparant les deux objets se détermine à partir de la formule qui sera uniquement explicité sous la forme de la ligne de code suivante :

La fonction renvoie par la suite, la formule suivante de la théorie de la gravitation universelle de Newton :

Cela correspond à la ligne suivante contenant un objet de la class Constante qui sera expliqué dans les lignes suivantes :

L’ensemble de la class Gravite est la suivante est écrite entièrement dans le programme du code Github présent dans le repository pour plus de simplicité de lecture.

Par la suite, nous allons nous occuper de définir une class responsable du calcul des équations horaires de notre système, c’est-à-dire des équations régissant les déplacements de notre objet.

Pour cela, nous allons définir une class que l’on appellera EquationHoraire. Cette class sera composé de 3 fonctions. La première responsable du calcul de l’accélération de l’objet. La seconde responsable du calcul de la vitesse. Enfin, la dernière responsable du calcul de la position. Pour rappel, ces équations ne seront presque exclusivement utilisé que dans la càs d’une non-conservation de l’énergie mécanique du système, c’est-à-dire dans le càs d’une force provenant de l’objet.

Pour le calcul de l’accélération, nous allons devoir calculer la graviter de notre objet au point de départ. Les arguments nécessaires seront par conséquent la masse de l’objet, la poussé de l’astre, ainsi que sa position dans le repère. La poussé et la position seront tous deux des vecteurs. La masse elle pourra-t-être un nombre entier ou un nombre décimal.

La partie qui suit, correspond au calcul de l’altitude de l’objet dans un cas plus complexe, mais plus véridique. Il s’agit pour l’heure, de piste de résolutions.

Nous conservons l’énergie mécanique au point « A » sous la forme , étant donné que cette dernière est déjà connu et par conséquent, une constante.

On remplace par la suite , qui est la norme du vecteur de l’intensité gravitationnelle au point « B ».

L’objectif final est de simplifier cette équation afin d’en obtenir une expression sous la forme d’un polynôme du second degré, c’est-à-dire sous la forme , où  sont des coefficients et , notre inconnue correspondant à.

On pourra également écrire , où est le rayon de l’astre attracteur.

On peut définir une fonction que l’on appellera f qui prendra comme paramètre l’altitude de notre fusée par rapport à un astre donnée.

Nous pouvons identifier trois membres distinct permettant l’écriture sous la forme d’un polynôme de degré 2.

Petit rappel de la forme d’un polynôme de degré 2 :

On peut écrire sous la forme de avec :

Donc f

Notre objectif est de trouver ce que l’on appelle les racines de notre polynôme, c’est-à-dire les valeurs de « x » pour lesquels, f(x)=0, où dans notre càs, la l’altitude correspondant au prochaines coordonnées de notre objet.

Pour cela, nous disposons d’un outil puissant, le «  » qui permet de trouver les racines de notre polynôme. Petit rappel, avec « a », « b » et « c », les coefficients de la fonction f, mis en évidence précédemment.

Dans notre càs, sera toujours supérieur ou égale à 0. Pour trouver les valeurs des racines, il nous suffit d’appliquer la formule suivante :

Dans le cas où , il n’existe qu’une unique solution et donc .

Dans le cas où , il n’existe qu’une unique solution et donc et . Nous prendrons toujours une valeur de « x » positive car il s’agit d’une altitude.